Sistemi a n gradi di libertà

Equazione generale del moto per sistemi a n gradi di libertà:

$$\mathbb{M}\cdot\ddot{q}(t)+(\mathbb{C}+\mathbb{G}+\mathbb{D})\dot{q}(t)+(\mathbb{K}+\mathbb{H}+\mathbb{N})\,q(t)=f(t)$$

Ne esamineremo alcuni casi particolari.

Vibrazioni libere non smorzate

Il problema è così definito:

$$\begin{cases}\mathbb{M}\ddot{q}(t)+\mathbb{K}q(t)=\mathbb{O}\\ q(0)=q_0\\ \dot{q}(0)=\dot{q}_0\end{cases}$$

$\mathbb{M}$ matrice $n\times n$ delle masse

$\mathbb{K}$ matrice $n\times n$ delle rigidezze

Si introduce la classe delle funzioni $q(t)=\psi\cdot g(t)$ per trovare la soluzione del problema mediante separazione delle variabili:

$$\mathbb{M}\cdot\psi\ddot{g}(t)+\mathbb{K}\psi\cdot g(t)=\mathbb{O}\iff\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\psi_j\ddot{g}(t)+\sum_{j=1}^{n}k_{ij}\psi_j g(t)=0;\quad i=1,2,\dots,n$$

$$\Rightarrow -\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)}=\frac{\sum_{j=1}^{n}k_{ij}\psi_j}{\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\psi_j}\qquad i=1,2,\dots,n$$

Il primo membro è uno scalare indipendente da i, il secondo non dipende da t; entrambi devono essere uguali a una costante λ:

$$\ddot{g}(t)+\lambda g(t)=0$$

$$\sum_{j=1}^{n}(k_{ij}-\lambda m_{ij})\psi_j=0\quad i=1,2,\dots,n\iff(\mathbb{K}-\lambda\mathbb{M})\cdot\psi=\mathbb{O}$$

La soluzione è non banale, $\psi\neq\mathbb{O}$, se $\det(\mathbb{K}-\lambda\mathbb{M})=0$. Se ne ricavano gli autovalori $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$. Essendo $\mathbb{K}$ ed $\mathbb{M}$ reali e simmetriche tali autovalori sono reali. $\mathbb{M}$ è inoltre definita positiva. Pertanto, definiti $\lambda_1\le\lambda_2\le\dots\le\lambda_n$:

- se $\mathbb{K}$ è definita positiva $\Rightarrow 0<\lambda_1\le\lambda_2\le\dots\le\lambda_n$;
- se $\mathbb{K}$ è semidefinita positiva $\Rightarrow 0\le\lambda_1\le\lambda_2\le\dots\le\lambda_n$.

Per ogni autovalore esiste una soluzione non banale caratterizzata dall'autovettore ψ_i, definito a meno di una costante moltiplicativa arbitraria. Dato λ_k e l'autovettore ψ_k ad esso relativo:

$$(\mathbb{K}-\lambda_k\mathbb{M})\psi_k=0\Rightarrow\mathbb{K}\psi_k=\lambda_k\mathbb{M}\psi_k\Rightarrow\psi_k^T\mathbb{K}\psi_k=\lambda_k\psi_k^T\mathbb{M}\psi_k$$

Definiamo $m_k=\psi_k^T\mathbb{M}\psi_k$ la k-esima massa modale e $k_k=\psi_k^T\mathbb{K}\psi_k$ la k-esima resistenza modale. Risulta $\lambda_k=\frac{k_k}{m_k}$. Essendo $\mathbb{M}$ definita positiva $m_k>0$; se $\mathbb{K}$ è definita positiva $k_k>0$, se è semidefinita positiva $k_k\ge 0$.

Ipotizziamo ora che gli autovalori siano distinti, cioè

$\lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall\, i \neq j$:

$$\mathbb{K}\,\psi_i = \lambda_i \mathbb{M} \psi_i,\ \mathbb{K}\psi_j = \lambda_j \mathbb{M}\psi_j \Rightarrow \psi_j^T \mathbb{K}\psi_i = \lambda_i \psi_j^T \mathbb{M}\psi_i,\ \psi_i^T \mathbb{K}\psi_j = \lambda_j \psi_i^T \mathbb{M}\psi_j$$

$$\Rightarrow (\psi_i^T \mathbb{K}\psi_j)^T = \lambda_j (\psi_i^T \mathbb{M}\psi_j)^T \Rightarrow \psi_j^T \mathbb{K}\psi_i = \lambda_j \psi_j^T \mathbb{M}\psi_i$$

Sottraiamo l'ultima equazione alla prima delle due ottenute al secondo passaggio:

$$\psi_j^T \mathbb{K}\psi_i - \psi_j^T \mathbb{K}\psi_i = (\lambda_i - \lambda_j)\,\psi_j^T \cdot \mathbb{M} \cdot \psi_i$$

$$\Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j)\,\psi_j^T \mathbb{M} \cdot \psi_i = 0$$

Essendo $\lambda_i \neq \lambda_j$ deve essere $\psi_j^T \mathbb{M} \cdot \psi_i = 0$. Segue quindi anche $\psi_j^T \mathbb{K} \cdot \psi_i = 0$. Gli autovettori distinti sono allora ortogonali attraverso le matrici $\mathbb{M}$ e $\mathbb{K}$. Per le definizioni di m_k e k_k si hanno:

$$\psi_j^T \mathbb{M}\psi_i = m_i \delta_{ij} \qquad \psi_j^T \cdot \mathbb{K} \cdot \psi_i = k_i \delta_{ij}$$

Definita inoltre la matrice modale $\Psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n]$:

$$\mathbb{L} = \Psi^T \cdot \mathbb{M} \cdot \Psi = \mathrm{diag}[m_k] \qquad \mathbb{N} = \Psi^T \cdot \mathbb{K}\,\Psi = \mathrm{diag}[k_k]$$

matrice delle masse modali — matrice delle rigidezze modali

$$\Lambda = \mathbb{L}^{-1} \cdot \mathbb{N} = \mathrm{diag}\left[\frac{k_k}{m_k}\right] = \mathrm{diag}[\lambda_k]$$

matrice degli autovalori

Sono tutte matrici diagonali. Si pone la costante moltiplicativa che distingue gli autovettori in modo che risulti $m_k = 1$, cioè $\psi_j^T \mathbb{M}\psi_i = \delta_{ij}$, $\psi_j^T \mathbb{K}\psi_i = \lambda_i \delta_{ij}$, $\mathbb{L} = \mathbb{I}$ e $\mathbb{N} = \Lambda$.

Se $\mathbb{K}$ è definita positiva il problema si risolve facilmente ($\lambda_k = \omega_k^2$):

$$\ddot{g}(t) + \omega_k^2 g(t) = 0 \Rightarrow g(t) = g_k(t) = A_k \cos(\omega_k t) + B_k \,\mathrm{sen}(\omega_k t)$$

$$\Rightarrow q_k(t) = \psi_k\, g_k(t) = \psi_k [A_k \cos(\omega_k t) + B_k \,\mathrm{sen}(\omega_k t)]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q(t) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k [A_k \cos(\omega_k t) + B_k \,\mathrm{sen}(\omega_k t)] \\ q(0) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k A_k = q_0 \\ \dot{q}(0) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k \omega_k B_k = \dot{q}_0 \end{cases}$$

Avendo già sostituito $t=0$ nell'espressione di $q(t)$ e nella sua derivata $\dot{q}(t) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k \omega_k [-A_k \,\mathrm{sen}(\omega_k t) + B_k \cos(\omega_k t)]$

Trasponendo e moltiplicando per $\mathbb{M}\psi_i$ ricaviamo A_i e B_i:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot \psi_k^T = q_0^T \\ \sum_{k=1}^{n} \omega_k B_k \psi_k^T = \dot{q}_0^T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} A_k \psi_k^T \cdot \mathbb{M}\psi_i = q_0^T \mathbb{M}\psi_i \\ \sum_{k=1}^{n} \omega_k B_k \psi_k^T \cdot \mathbb{M}\psi_i = \dot{q}_0^T \mathbb{M} \cdot \psi_i \end{cases}$$

Per $k = i$:

$$\begin{cases} A_i \cdot \psi_i^T \mathbb{M}\psi_i = A_i \cdot m_i = q_0^T \cdot \mathbb{M}\psi_i \\ \omega_i \cdot B_i \cdot \psi_i^T \mathbb{M}\psi_i = \omega_i B_i \cdot m_i = \dot{q}_0^T \mathbb{M}\psi_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_i = \frac{1}{m_i} \cdot q_0^T \cdot \mathbb{M}\psi_i \\ B_i = \frac{1}{\omega_i m_i} \dot{q}_0^T \mathbb{M}\psi_i \end{cases}$$

Per autovettori ortonormali $m_i = 1$ e $A_i = q_0^T \mathbb{M}\psi_i$, $B_i = \frac{1}{\omega_i} \dot{q}_0^T \mathbb{M}\psi_i$

Ponendo $q_0 = \Psi_j$ e $\dot{q}_0 = 0$ deduciamo il significato fisico di questo vettore:

$$\begin{cases} A_i = \Psi_j^T \mathbb{M} \Psi_i = \delta_{ij} \\ B_i = 0 \end{cases} \Rightarrow q(t) = \sum_{k=1}^{n} \Psi_k \cdot \delta_{kj} \cos(\omega_k t) = \Psi_j \cos(\omega_j t)$$

L'autovettore definisce la particolare configurazione di spostamento iniziale che applicata alla struttura ne provoca l'oscillazione armonica di tutti i punti con la stessa pulsazione. Gli autovettori costituiscono modi o forme proprie, naturali o elementari di vibrazione. Gli autovalori sono il quadrato delle pulsazioni ad esse associate. Qualsiasi vibrazione libera può essere ottenuta come sovrapposizione di oscillazioni elementari:

$$q(t) = \sum_{k=1}^{n} \Psi_k \cdot p_k(t)$$

Vibrazioni forzate non smorzate

Anche per vibrazioni forzate non smorzate giungiamo alla legge di trasformazione principale analoga a quella del caso precedente:

$$q(t) = \sum_{k=1}^{n} \Psi_k \, p_k(t) \Rightarrow q(t) = \Psi \cdot p(t)$$

Con $\Psi = \{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n\}$ e $p(t) = \{p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)\}^T$. Possiamo invertire la trasformazione essendo Ψ non singolare per l'indipendenza lineare degli autovettori. Possiamo allora moltiplicare per $\Psi^T \cdot \mathbb{M}$ e ottenere un'espressione del teorema di espansione:

$$p(t) = \Psi^T \cdot \mathbb{M} \cdot q(t)$$

A primo membro $\mathbb{M}$ non compare poiché ci siamo posti nel caso in cui $m_k = 1$. Sostituiamo ora $q(t) = \Psi \cdot p(t)$ nell'equazione del moto $\mathbb{M}\ddot{q}(t) + \mathbb{K} q(t) = f(t)$:

$$\mathbb{M} \Psi \ddot{p}(t) + \mathbb{K} \cdot \Psi \, p(t) = f(t)$$

Premoltiplichiamo ora per Ψ^T e successivamente per $\mathbb{L}^{-1}$:

$$\Psi^T \mathbb{M} \Psi \cdot \ddot{p}(t) + \Psi^T \cdot \mathbb{K} \Psi \, p(t) = \Psi^T f(t) \Rightarrow \mathbb{L} \cdot \ddot{p}(t) + \mathbb{N} \cdot p(t) = \Psi^T (t)$$

$$\Rightarrow \mathbb{L}^{-1} \mathbb{L} \cdot \ddot{p}(t) + \mathbb{L}^{-1} \mathbb{N} \, p(t) = \mathbb{L}^{-1} \Psi^T f(t) \Rightarrow \ddot{p}(t) + \Lambda \, p(t) = \mathbb{L}^{-1} \Psi^T f(t)$$

Abbiamo ottenuto un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine lineare a coefficienti costanti disaccoppiate. In notazione indiciale:

$$\ddot{p}_k(t) + \omega_k^2 p_k(t) = \frac{1}{m_k} \sum_{i=1}^{n} \Psi_{ki} \cdot f_i(t)$$

In cui a secondo membro la sommatoria rappresenta la k-esima forza modale (k-esima componente delle forze generalizzate nel sistema di riferimento principale).
Riconduciamo il problema delle vibrazioni forzate non smorzate di un sistema a n gradi di libertà alle vibrazioni forzate non smorzate di n sistemi a singolo grado di libertà.
La coordinata libera del k-esimo oscillatore semplice è la k-esima coordinata principale; la pulsazione del k-esimo oscillatore semplice è la k-esima pulsazione propria; forza e massa sono le k-esime forza e massa modali.
Possiamo anche esprimere le condizioni iniziali attraverso $\mathbb{p}(t)$:

$$\begin{cases} q(0)=q_0 \\ \dot{q}(0)=\dot{q}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Psi \cdot p(0)=q_0 \\ \Psi \cdot \dot{p}(0)=\dot{q}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Psi^T \cdot M \cdot \Psi \, p(0)= \Psi^T M \, q_0 \\ \Psi^T \cdot M \cdot \Psi \, \dot{p}(0)= \Psi^T M \, \dot{q}_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{p}(0)= \mathbb{L}^{-1} \cdot \Psi^T \cdot M \, q_0 = \mathbb{p}_0 \\ \dot{\mathbb{p}}(0)= \mathbb{L}^{-1} \cdot \Psi^T \cdot M \, \dot{q}_0 \quad \dot{\mathbb{p}}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_k(0)= p_{k0} \\ \dot{p}_k(0)= \dot{p}_{k0} \end{cases} \quad k=1,\dots,n$$

La trasformazione principale conduce da un sistema a n gradi di libertà a n sistemi indipendenti a singolo grado di libertà.

Vibrazioni forzate smorzate

Questa volta applichiamo la legge di trasformazione principale, $q(t)= \Psi \cdot p(t)$, all'equazione del moto con smorzamento:

$$\mathbb{M} \cdot \ddot{q}(t) + \mathbb{C} \, \dot{q}(t) + \mathbb{K} \, q(t) = f(t) \Rightarrow \mathbb{M} \, \Psi \, \ddot{p}(t) + \mathbb{C} \cdot \Psi \, \dot{p}(t) + \mathbb{K} \cdot \Psi \cdot p(t) = f(t)$$

$$\Rightarrow \Psi^T \cdot M \cdot \Psi \, \ddot{p}(t) + \Psi^T \cdot \mathbb{C} \cdot \Psi \cdot \dot{p}(t) + \Psi^T \cdot \mathbb{K} \cdot \Psi \, p(t) = \Psi^T f(t)$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} \cdot \ddot{p}(t) + \Psi^T \cdot \mathbb{C} \cdot \Psi \cdot \dot{p}(t) + \mathbb{N} \cdot p(t) = \Psi^T \cdot f(t)$$

$$\Rightarrow \mathbb{L}^{-1} \cdot \mathbb{L} \, \ddot{p}(t) + \mathbb{L}^{-1} \cdot \Psi^T \cdot \mathbb{C} \, \Psi \, \dot{p}(t) + \mathbb{L}^{-1} \cdot \mathbb{N} \cdot p(t) = \mathbb{L}^{-1} \cdot \Psi^T \cdot f(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{\mathbb{p}}(t) + \Gamma \cdot \dot{\mathbb{p}}(t) + \Lambda \, \mathbb{p}(t) = \mathbb{L}^{-1} \cdot \Psi^T \cdot f(t)$$

Avendo definito $\Gamma = \mathbb{L}^{-1} \cdot \Psi^T \cdot \mathbb{C} \, \Psi$, in generale non diagonale perché $\Psi^T \cdot \mathbb{C} \cdot \Psi$ può essere non diagonale. Il sistema è quindi costituito da equazioni differenziali del secondo ordine lineari a coefficienti costanti accoppiate:

$$\begin{cases} \ddot{p}_k(t) + \sum_{l=1}^{n} \gamma_{kl} \, \dot{p}_l(t) + \omega_k^2 \, p_k(t) = \frac{1}{m_k} \sum_{i=1}^{n} \psi_{ki} \, f_i(t) \\ p_k(0)= p_{k0} \\ \dot{p}_k(0)= \dot{p}_{k0} \end{cases}$$

Essendo $\mathbb{C}$ non riusciamo a disaccoppiare le equazioni del moto. Per interpretare fisicamente ciò che le equazioni rappresentano passiamo al caso delle vibrazioni libere smorzate:

$$\begin{cases} \mathbb{M}\ddot{q}(t) + \mathbb{C}\dot{q}(t) + \mathbb{K}q(t) = 0 \\ q(0) = q_0 = \Psi_j \\ \dot{q}(0) = \dot{q}_0 = \mathbb{O} \end{cases}$$

Per la legge di trasformazione principale:

$$\begin{cases} \Psi^T \mathbb{M} \Psi p(0) = \Psi^T \mathbb{M} q_0 \\ \Psi^T \mathbb{M} \Psi \dot{p}(0) = \Psi^T \mathbb{M} \dot{q}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(0) = \mathbb{L}^{-1}(\Psi^T \mathbb{M} \cdot \Psi_j) \\ \dot{p}(0) = \mathbb{L}^{-1} \cdot \Psi^T \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbb{O} = \mathbb{O} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_k(0) = \frac{1}{m_k} \Psi_k \cdot \mathbb{M} \cdot \Psi_j = \delta_{kj} \\ \dot{p}_k(0) = 0 \end{cases} \qquad k = 1, \dots, n$$

Il problema diviene:

$$\begin{cases} \ddot{p}(t) + \Gamma \dot{p}(t) + \Lambda \cdot p(t) = \mathbb{O} \\ p(0) = \mathbb{L}^{-1} \Psi^T \mathbb{M} \Psi_j \\ \dot{p}(0) = \mathbb{O} \end{cases}$$

A questo punto abbiamo due casi:

- caso a: $\mathbb{C} = \mathbb{O} \Rightarrow \Gamma = \mathbb{O}$;

$$\Rightarrow p_k(t) = A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t) = \delta_{kj} \cos(\omega_k t)$$

- caso b: $\mathbb{C} \neq \mathbb{O} \Rightarrow \Gamma \neq \mathbb{O}$;

$$\Rightarrow p_k(t) \neq 0 \text{ anche se } p_{k0} = 0 \ (k \neq j)$$

Il problema è disaccoppiato se $\mathbb{C}$ è tale da far risultare Γ diagonale, cioè tale che $\gamma_{kl} = 0$ per $k \neq l$. Allora segue:

$$\begin{cases} \ddot{p}_k(t) + \gamma_{kk} \dot{p}_k(t) + \omega_k^2 p_k(t) = \frac{1}{m_k} \Psi_k^T f(t) \\ p_k(0) = p_{k0} \\ \dot{p}_k(0) = \dot{p}_{k0} \end{cases} \qquad k = 1, \dots, n$$

Possiamo ricondurci a n sistemi a singolo grado di libertà ponendo $\gamma_{kk} = 2\xi_k \omega_k$:

$$\begin{cases} \ddot{p}_k(t) + 2\xi_k \omega_k \dot{p}_k(t) + \omega_k^2 p_k(t) = \frac{1}{m_k} \Psi_k^T f(t) \\ p_k(0) = p_{k0} \\ \dot{p}_k(0) = \dot{p}_{k0} \end{cases} \qquad k = 1, \dots, n$$

Per completare l'interpretazione fisica torniamo alle vibrazioni libere smorzate con condizioni iniziali $q(0) = \Psi_j$ e $\dot{q}(0) = \mathbb{O}$. La soluzione del problema è quella studiata per i sistemi oscillatori semplici a singo-

1° grado di libertà:

$$\begin{cases} \ddot{p}_k(t) + 2\xi_k\omega_k\dot{p}_k(t) + \omega_k^2 p_k(t) = 0 \\ p_j(0) = p_{j0} = 1, \quad p_k(0) = p_{k0} = 0 \qquad \forall k \neq j \qquad k = 1, \dots, n \\ \dot{p}_k(0) = \dot{p}_{k0} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_k(t) = e^{-\xi_k\omega_k t}\left[A_k \cos\left(\omega_k\sqrt{1-\xi_k^2}\, t\right) + B_k \,\mathrm{sen}\left(\omega_k\sqrt{1-\xi_k^2}\, t\right)\right]$$

$$\Rightarrow \dot{p}_k(t) = -\xi_k\omega_k e^{-\xi_k\omega_k t} A_k \cos\left(\omega_k\sqrt{1-\xi_k^2}\, t\right) + $$
$$-\omega_k\sqrt{1-\xi_k^2}\, e^{-\xi_k\omega_k t} \cdot A_k \cdot \mathrm{sen}\left(\omega_k\sqrt{1-\xi_k^2}\, t\right) + $$
$$-\xi_k\omega_k e^{-\xi_k\omega_k t} \cdot B_k \,\mathrm{sen}\left(\omega_k\sqrt{1-\xi_k^2}\, t\right) + $$
$$+\omega_k\sqrt{1-\xi_k^2} \cdot e^{-\xi_k\omega_k t} \cdot B_k \cos\left(\omega_k\sqrt{1-\xi_k^2}\, t\right)$$

Imponiamo le condizioni iniziali per ricavare A_k e B_k:

$$\begin{cases} p_k(0) = A_k = \delta_{kj} \\ \dot{p}_k(0) = -\xi_k\omega_k A_k + \omega_k\sqrt{1-\xi_k^2} \cdot B_k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_k = \delta_{kj} \\ B_k = \dfrac{\xi_k\omega_k\delta_{kj}}{\omega_{kd}} \end{cases}$$

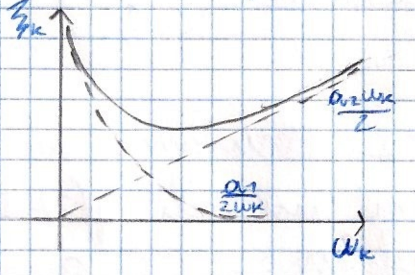
Con $\omega_{kd} = \omega_k\sqrt{1-\xi_k^2}$. La soluzione è:

$$p_k(t) = \delta_{kj} \cdot e^{-\xi_k\omega_k t}\left[\cos(\omega_{kd} t) + \frac{\xi_k\omega_k}{\omega_{kd}} \cdot \mathrm{sen}(\omega_{kd} t)\right]$$

$$\Rightarrow q_k(t) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k \cdot p_k(t) = \psi_j e^{-\xi_j\omega_j t}\left[\cos(\omega_{jd} t) + \frac{\xi_j\omega_j}{\omega_{jd}}\,\mathrm{sen}(\omega_{jd} t)\right]$$

La risposta è proporzionale al j-esimo autovettore e la vibrazione è armonica smorzata con frequenza coincidente a quella relativa alla forma modale che caratterizza lo stato iniziale. Tale forma modale di oscillazione si conserva nel tempo con pulsazione $\omega_{jd} = \omega_j\sqrt{1-\xi_j^2}$ e smorzamento $\xi_j = \frac{\gamma_{jj}}{2\omega_j}$.

I sistemi che presentano tale proprietà (conservazione della forma modale iniziale nel tempo) sono detti classicamente smorzati. $\mathbb{C}$ deve portare a una Γ diagonale. Condizione necessaria e sufficiente affinché ciò avvenga è $\mathbb{C} = \mathbb{M} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k (\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K})^{k-1}$ con a_k $(k = 1, \dots, n)$ costanti opportune. Se $a_k = 0$ per $k > 2$ segue la condizione sufficiente (ma non necessaria) $\mathbb{C} = a_1\mathbb{M} + a_2\mathbb{K}$. Lo smorzamento è detto di Rayleigh o proporzionale (difficile da trovare, si usano spesso valori empirici).



$$\Gamma = \mathbb{L}^{-1} \cdot \Psi^T \cdot \mathbb{C}\,\Psi = \mathbb{L}^{-1} \cdot \Psi^T (a_1\mathbb{M} + a_2\mathbb{K})\Psi = a_1 \mathbb{L}^{-1}\mathbb{L} + $$
$$+ a_2 \mathbb{L}^{-1}\mathbb{N} = a_1\mathbb{I} + a_2\Lambda$$

$$\Rightarrow \gamma_{kk} = 2\xi_k\omega_k = a_1 + a_2\omega_k^2$$

$$\Rightarrow \xi_k = \frac{a_1}{2\omega_k} + \frac{a_2\omega_k}{2}$$

Sistemi classicamente smorzati

Concentriamoci sui sistemi classicamente smorzati affrontando le analisi nel dominio del tempo e in quello della frequenza. Ricordiamo che il problema è:

$$\begin{cases} \mathbb{M}\ddot{q}(t)+\mathbb{C}\dot{q}(t)+\mathbb{K}q(t)=f(t) \\ q(0)=q_0 \\ \dot{q}(0)=\dot{q}_0 \end{cases} \xRightarrow[q(t)=\Psi p(t)]{} \begin{cases} \ddot{p}_k(t)+2\xi_k\omega_k\dot{p}_k(t)+\omega_k^2 p_k(t)=\frac{1}{m_k}\psi_k^T f(t) \\ p_k(0)=p_{k0} \\ \dot{p}_k(0)=\dot{p}_{k0} \end{cases} \quad k=1,\dots,m$$

Nel dominio del tempo poniamo $p_{k0}=\dot{p}_{k0}=0$ $(k=1,\dots,m)$ e recuperiamo l'integrale di Duhamel:

$$p_k(t)=\int_0^t h_{pk}(t-\tau)\,\psi_k^T f(\tau)\,d\tau,\quad h_{pk}(t)=e^{-\xi_k\omega_k t}\frac{1}{m_k\omega_k\sqrt{1-\xi_k^2}}\sin\left(\omega_k\sqrt{1-\xi_k^2}\,t\right)$$

In cui $\psi_k^T f(\tau)$ è la k-esima forza modale e $h_{pk}(t)$ la k-esima funzione di risposta modale ad impulso $(k=1,\dots,m)$. Si costruisce la matrice di risposta modale ad impulso $(m\times m)$:

$$\mathbb{h}_p(t)=\begin{bmatrix} h_{p1}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{p2}(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p(t)=\int_0^t \mathbb{h}_p(t-\tau)\,\Psi^T f(\tau)\,d\tau$$

Con la legge di trasformazione principale:

$$q(t)=\int_0^t \Psi\,\mathbb{h}_p(t-\tau)\,\Psi^T f(\tau)\,d\tau=\int_0^t \mathbb{h}(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau$$

In cui si ha $\mathbb{h}(t)=\Psi\,\mathbb{h}_p(t)\,\Psi^T$. La soluzione si ottiene seguendo lo stesso procedimento visto per il sistema a un grado di libertà:

$$p_k(t)=p_k(t_0)\left[-m_k\omega_k^2 g_{om,k}(t-t_0)+\dot{p}_k(t_0)\,m_k h_{pk}(t-t_0)\right]+\int_{t_0}^t h_{pk}(t-\tau)\,f_k(\tau)\,d\tau$$

In forma matriciale:

$$y_k(t)=\begin{pmatrix} p_k(t) \\ \dot{p}_k(t) \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} -m_k\omega_k^2 g_{om,k}(t-t_0) & m_k h_{pk}(t-t_0) \\ -m_k\omega_k^2 \dot{g}_{om,k}(t-t_0) & m_k \dot{h}_{pk}(t-t_0) \end{bmatrix} y_k(t_0)+$$

$$+\int_{t_0}^t \frac{1}{m_k}\,\Theta_k(t-\tau)\,v\,\psi_k^T f(\tau)\,d\tau \qquad k=1,2,\dots,m \qquad v=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

In cui la matrice tra parentesi quadre è la k-esima matrice di transizione modale, $\Theta_k(t-t_0)$. Se i modi sono ortonormali:

$$y(t)=\begin{pmatrix} p(t) \\ \dot{p}(t) \end{pmatrix}=\Theta_M(t-t_0)\,y(t_0)+\int_{t_0}^t \Theta_M(t-\tau)\,V_M\,f(\tau)\,d\tau$$

Operando nello spazio modale possiamo risolvere il sistema attraverso gli m sistemi disaccoppiati a 1 g.d.l. Discretizzando nel tempo possiamo ottenere la soluzione al generico passo tempo rale:

$$y_k(t_{j+1}) = \Phi_k(\Delta t)\, y_k(t_j) + \mathbb{L}_k(\Delta t) \cdot \Psi^T f(t_{j+1}) \qquad k = 1, \dots, m$$

In cui $\mathbb{L}_k(\Delta t) = [\Phi_k(\Delta t) - \mathbb{I}]\, A_k^{-1}$ e:

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_k^2 & \xi_k \omega_k \end{bmatrix} \qquad \Phi_k(t) = \exp(A_k t)$$

Ottenuto y_k si ricostruisce la soluzione usando ancora una volta la trasformazione principale:

$$q(t) = \Psi \cdot p(t) \Rightarrow q(t) = \sum_{k=1}^{m} \Psi_k\, p_k(t) \Rightarrow q_i(t) = \sum_{k=1}^{m} \psi_{ki}\, p_k(t)$$

Nel dominio della frequenza si ritrovano $\Psi_k^T \cdot F(\omega)$ trasformata di Fourier della k-esima forza modale e $H_{pk}(\omega)$ funzione di risposta modale complessa in frequenza:

$$H_{pk}(\omega) = \frac{1}{m_k \omega_k^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_k^2} + 2i\xi_k \frac{\omega}{\omega_k}} \qquad k = 1, \dots, m$$

$$\Rightarrow P_k(\omega) = H_{pk}(\omega) \cdot \Psi_k^T \cdot F(\omega) \qquad k = 1, \dots, m$$

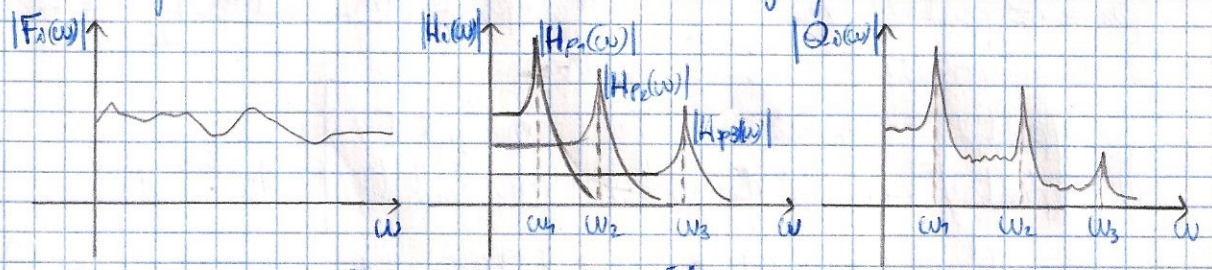
Si perviene alla matrice di risposta modale in frequenza (diagonale $m \times m$):

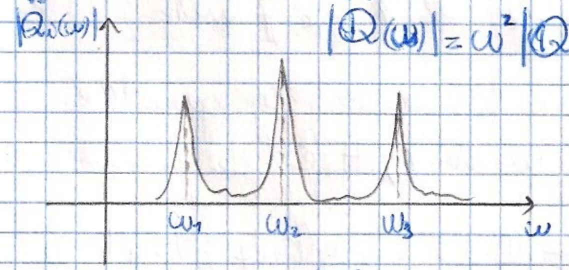
$$\mathbb{H}_p(\omega) = \begin{bmatrix} H_{p1}(\omega) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_{p2}(\omega) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H_{pm}(\omega) \end{bmatrix} \Rightarrow P(\omega) = \mathbb{H}_p(\omega) \cdot \Psi^T \cdot F(\omega)$$

Sempre con la legge di trasformazione principale:

$$Q(\omega) = \Psi \cdot P(\omega) = \Psi\, \mathbb{H}_p(\omega) \cdot \Psi^T F(\omega) \Rightarrow Q(\omega) = \mathbb{H}(\omega) \cdot F(\omega)$$

Avendo definito $\mathbb{H}(\omega) = \Psi \cdot \mathbb{H}_p(\omega) \cdot \Psi^T$. Graficamente:





Parliamo di troncamento modale. Anziché risolvere l'equazione differenziale rigorosa, per gli n gradi di libertà, si considera un numero $\bar{m} < m$ approssimando quindi la soluzione. Si risolve così un numero inferiore di equazioni differenziali e si calcolano i soli primi $\bar{n}<n$ autovalori e autovettori (che sono poi quelli di interesse nella pratica). Si ottengono:

$$q(t) \cong \sum_{k=1}^{\bar{n}} \psi_k \, p_k(t) \qquad |P_k(\omega)| = |H_{pk}(\omega)| \cdot \psi_k^T \cdot |F(\omega)|$$

Essendo, nell'analisi sismica, $\psi_k^T \, |F(\omega)|$ costante con ω (segnale tipo su roccia), si considera $\bar{n}=3$, che dà ottima approssimazione. Nel caso del vento $\psi_k^T \, |F(\omega)|$ decresce rapidamente con ω: $\bar{n}=1$ conduce a risultati quasi perfetti.